傻逼勒贝格相关的定理

这里并不展开勒贝格积分本身，因为懒得看了

The Main Theorems of Lebesgue Integration

Monotone Convergence Theorem (B. LEVI's Theorem)

假设$(f_k)_{k\in N}$是一个非减序列（即，对于所有$x\in R^n$和所有$k\in N$，$f_k(x)\le f_{k+1}(x)$），且是可积的函数序列，且积分序列$(\int f_k)_{k\in N}$有界。那么$f(x)=\lim_{k\to\infty}f_k(x)$几乎处处有限，且极限函数$f:R^n\to\overline{R}$可积，且

$$\int f=\lim_{k\to\infty}\int f_k$$

Bounded Convergence Theorem (H. LEBESGUE's Theorem)

也叫 Dominated Convergence Theorem
假设$(f_k)_{k\in N}$是一个可积函数序列，且几乎处处收敛，且存在一个可积函数（可积“上界”）$\Phi\ge 0$，使得对于所有$x\in R^n$，$|f_k(x)|\le\Phi(x)$。那么极限函数$f(x)=\lim_{k\to\infty}f_k(x)$可积，且

$$\int f=\lim_{k\to\infty}\int f_k$$

Parameter Integrals

这可以说是 H. Lebesgue's Theorem 的一个推论
假设$f:X\times Y\to R$（$X\subseteq R^m,Y\subseteq R^n$）是一个函数，且对于每个$x\in X$，$y\to f(x,y)$是可积的，且$F:X\to R$定义为$F(x)=\int_Y f(x,y)d^ny$

1. 如果对于每个$y\in Y$，$x\to f(x,y)$是连续的，且存在一个可积函数$\Phi:Y\to R$，使得对于所有$(x,y)\in X\times Y$，$|f(x,y)|\le\Phi(y)$，那么F是连续的
2. 如果对于每个$y\in Y$，$x\to f(x,y)$是C^1函数（1阶导数连续的函数），且存在一个可积函数$\Phi:Y\to R$，使得对于所有$(x,y)\in X\times Y$，$|\frac{\partial f}{\partial x_j}(x,y)|\le\Phi(y)$，那么$F$是$C^1$函数，且满足

$$\frac{\partial F}{\partial x_j}(x)=\int_Y\frac{\partial f}{\partial x_j}(x,y)d^ny\quad\text{for}\quad 1\le j\le m$$

Fubini's Theorem

Theorem

任何连续函数$f:[a,b]\to R$都是黎曼可积的

Theorem (Little Fubini)

假设$f:[a,b]\times[c,d]\to\mathbb{R},(x,y)\to f(x,y)$是一个连续函数。对于$y\in[c,d]$，定义$F(y)=\int_a^b f(x,y)dx$，那么$F:[c,d]\to\mathbb{R}$是黎曼可积的，且满足

$$\int_{[a,b]\times[c,d]} f(x,y)d^2(x,y) = \int_c^d F(y)dy = \int_c^d \left(\int_a^b f(x,y)dx\right)dy$$

Theorem

假设$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$在每一个有限闭区间$[a,b]\in\mathbb{R}$，那么$f$是勒贝格可积的当且仅当下面这个improper integral

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \lim_{a\to-\infty, b\to+\infty} \int_a^b f(x)dx$$

绝对收敛。如果f是勒贝格可积的，那么两边的值相等。

Theorem (Fubini General Theorem)

假设$f:R^m\times R^n\to\overline{R}$是可积的。那么积分$F(y)=\int_{R^m} f(x,y)d^m x$对于几乎所有$y\in R^n$存在。而且，将$F$在$R^n$上延拓，我们有$F$是可积的，且

$$\int_{R^n} F(y)d^n y = \int_{R^n}\left(\int_{R^m} f(x,y)d^m x\right)d^n y = \int_{R^m\times R^n} f(x,y)d^{m+n}(x,y)$$

Change of Variables

Theorem (Change of Variables)

假设$U,V\subseteq R^n$是开集，并且$T:U\to V$是一个diffeomorphism (微分同胚)。那么函数$f:V\to\mathbb{R}$在V上可积当且仅当$x\to f(T(x))\,|\det J_T(x)|$在$U$上可积。如果这是成立的，那么我们有

$$\int_U f(T(x))\,|\det J_T(x)|d^n x = \int_V f(y)d^n y$$

举个极坐标的例子：
假设$U=\{(r,\theta)\in R^2 : r>0, 0<\theta<2\pi\}$，$V=R^2$，$T(r,\theta)=(r\cos\theta, r\sin\theta)$，那么$T$是一个diffeomorphism，且$J_T(r,\theta)=r$，所以

$$\int_{R^2} f(x,y)dxdy = \int_{R^2} f(r\cos\theta, r\sin\theta)rdrd\theta$$

Diffeomorphism的定义

假设$U,V\subseteq R^n$是开集（即，$U^\circ=U, V^\circ=V$）。映射$T:U\to V$是一个diffeomorphism（微分同胚），如果

1. T是一个双射
2. T和它的逆映射$T^{-1}:V\to U$都是C^1映射（即，连续可微的映射）（这里就是要算T的Jacobi Matrix，再说明这个矩阵可逆（行列式不等于0））

勒贝格积分的初等性质

1. 如果f是可积的，那么$|f|$也是可积的。如果适用，那么

$$\left|\int f\right| \le \int |f| = \|f\|_1$$

2. 如果f_1, f_2是可积的，那么$c_1 f_1 + c_2 f_2$也是可积的，且

$$\int (c_1 f_1 + c_2 f_2) = c_1 \int f_1 + c_2 \int f_2$$

3. 如果$f_1 \le f_2$是可积的，那么

$$\int f_1 \le \int f_2$$

4. 如果f_1, f_2是可积的，且其中一个是有界的，那么$f_1 f_2$也是有界的
5. 如果f_1, f_2是可积的，那么$\max(f_1, f_2)$和$\min(f_1, f_2)$也是可积的

   最后一个性质意味着，对于f，$f_+ = \max(f, 0)$和$f_- = \min(f, 0)$也是可积的。

   注意到$f_+, f_- \ge 0$，$f = f_+ - f_-$，$|f| = f_+ + f_-$